

12.3. 因式定理 (Factor Theorem)

先問大家點解“2 係 8 嘅因數”。

I 我諗大家都會話“因為 $2 \times 4 = 8$ ”。

I 另一種講法係“8 可以被 2 除得盡”。而“除得盡”亦即係“餘數=0”。

同樣道理，如果 $(ax + b)$ 係一個多項式 $f(x)$ 嘅因式，咁即係話 $f(x) \div (ax + b)$ 嘅時候，餘數係 0，即“ $f(-b/a) = 0$ ”。只要明白“點解餘數係等於零”就已經可以話學識“因式定理”！

因式定理所講嘅係：

對於一個多項式 $f(x)$ ，如 $f(-b/a) = 0$ ，則 $(ax + b)$ 係 $f(x)$ 的因式。

例子：求 $f(1)$ 。由此，因式分解 $2x^3 + 3x^2 - 3x - 2$ 。

係會考嘅多項式因式分解題目入面，最多只會出到“三次方”。而題目會先“提示你第一個因式係咩”。提示嘅方法可以係叫你證明 $(x - 1)$ 係 $f(x)$ 嘅因式，或者叫你計 $f(1)$ 。不過無論點俾提示你都好，都係講緊要用“因式定理”（因為 $f(1) = 0$ ，所以 $(x - 1)$ 係 $f(x)$ 嘅因式）。

（留意，如果你計唔到 $f(1) = 0$ ，99.99% 係因為你計錯數。）

個答案可以咁寫：

$$f(1) = 2(1)^3 + 3(1)^2 - 3(1) - 2 = 0$$

根據因式定理，因 $f(1) = 0$ ，所以 $(x - 1)$ 是 $2x^3 + 3x^2 - 3x - 2$ 的因式。

$$\begin{aligned} \text{所以，} \quad 2x^3 + 3x^2 - 3x - 2 &= (x - 1)(2x^2 + 5x + 2) \\ &= (x - 1)(2x + 1)(x + 2) \end{aligned}$$

註：同學係計上面條數嘅時候，第一步就係係草稿紙到用長除法計：

$$2x^3 + 3x^2 - 3x - 2 \div x - 1$$

大家應計到餘數係 0。但更重要係計到個商數等於 $2x^2 + 5x + 2$ 。咁就可以寫低：

$$\begin{aligned} 2x^3 + 3x^2 - 3x - 2 \\ &= (x - 1)(2x^2 + 5x + 2) \end{aligned}$$

之後再用部計數機嘅“解一元二次方程”程式幫你做個商數嘅因式分解，咁就可以再寫到：

$$= (x - 1)(2x + 1)(x + 2)$$