

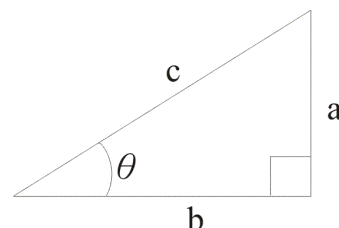
13. 續三角 (More about Trigonometry)

13.1. 理解正弦、餘弦和正切函數、其圖像及其性質 (Understand the Functions Sine, Cosin and Tangent, and their Graphs and Properties)

13.1.1. 基本三角函數

- 喺初中嘅時候大家已經學咗“喺直角三角形入面嘅三角函數”。

$$\sin\theta = \frac{\text{對邊}}{\text{斜邊}}; \quad \cos\theta = \frac{\text{鄰邊}}{\text{斜邊}}; \quad \tan\theta = \frac{\text{對邊}}{\text{鄰邊}}$$



✧ 有 D 書會寫 $\sin\theta = a/c$ 。

但除非你記埋邊條邊叫“a”、邊條叫“b”，否則就好易會錯！

我就建議大家記 $\sin\theta = \frac{\text{對邊}}{\text{斜邊}}$ 等嘅式。

- ✧ 數學能力較差嘅同學一般都覺得三角比好難。我相信咁就因為大家唔明到底咩叫 sin、cos 同 tan。

- 其實 D 三角函數就係話你知 D 邊嘅比例。

- 我諗如果我問“ $\frac{\text{對邊}}{\text{斜邊}} = \frac{1}{2}$ ，而對邊長 2cm，咁斜邊係幾長呢？”我諗大家都應該識得計。

- 喺三角比入面，我哋只不過要記得埋 D 定義，然後睇返要用邊條式咩幫哋計條數。

- ◆ 例如題目係“已知斜邊=2cm、 $\theta = 40^\circ$ ，求對邊的長度”。因為喺問“斜邊同對邊”，所以我哋要用 cos 這函數，把 40° 代入去，而得到“ $\cos 40^\circ = \text{對邊}/2$ ”。

13.1.2. 廣義角三角函數

- ✧ 上面嘅“基本定義”係講緊直角三角形入面嘅三角比（即兩條邊嘅邊長比）。因此代入函數嘅角必定喺細過 90° 。

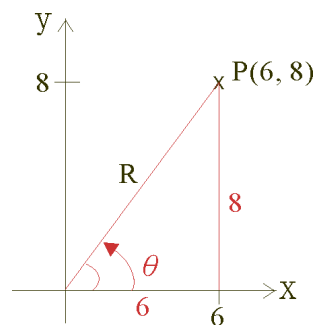
- 而“廣義角三角函數”其實係同坐標幾何好有關係嘅。

- 我哋先考慮將一個直角三角形放入坐標系統度。

- 代入三角函數嘅角 θ 會係由 x-軸正方開始、逆時針度起。

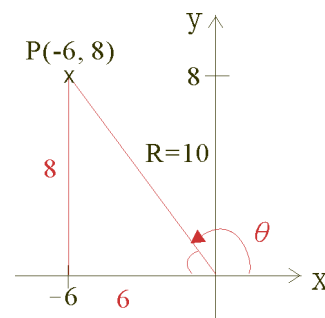
- 而三角形嘅邊長就會由 P 點嘅坐標而決定。

- 而 P 點與原點(0, 0)的距離為 R，可以用畢氏定理嚟計到。



- 依家考慮移動 P 點至(-8, 6)嘅位置。

- 留意 θ 已經大過 90° 。
- 利用 P 點嘅位置，我哋照畫個直角三角形出嚟。
留意當中有一隻角係 mark 住左嘅。



- 廣義角三角函數可以話係當 θ 大過 90° 時，我哋用右圖中嘅正角三角同 P 點嘅坐標嚟計 D 三角函數。因此：
 - $\sin \theta = -6/10 = -0.6$ （留意 P 嘅 x-坐標係負，而 R 就永遠係正。）
 - $\cos \theta = 8/10 = 0.8$ （留意 P 嘅 y-坐標係正。）
 - $\tan \theta = 8/-6 = -1.33$
 - 大家可以用 143.13° ，用計數機計吓佢嘅 $\sin$ ， $\cos$ 同 $\tan$ 。

- ☆ 以上就係“廣義角三角函數”。

- 其實大家最緊要係知道三角函數所代嘅角係可以大過 90° （其實係可以係負度數）。
- 而個三角比嘅值亦可以係負數。

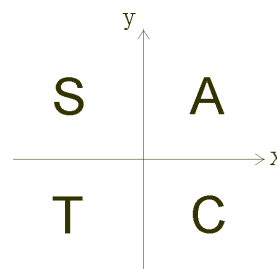
13.1.3. 廣義角三角函數的正負值

- 繼續上面最後提到嘅兩點

- 代入三角函數嘅角可以係一個負嘅度數。
 - ◆ 負度數只係代表我哋由 x-軸正方順時針咁量度隻。
 - 依點同“如果正數代表向左、咁負數就代表向右”差不多。
- 三角比嘅值可以係負數。

- ◆ 而右圖就總結左喺唔同象限入面嘅角代入 D 三角函數時，邊個嘅值會係正。

- C：只有 $\cos$ 係正
- A：所有都會係正
- S：只有 $\sin$ 為正
- T：只有 $\tan$ 為正



- ◆ 要記住個次序，D 書通常有兩個方法：

- 記住“cast”依個字（cast 即係我哋講嘅演員陣容“卡屎”）。
- 記住“All Sugar To Coffee”

- 例子解說： 大家可以用計機數去睇吓以下嘅推論啱唔啱：

- 130° 係喺第二象限，第二象限係“S”（即 $\sin$ ）。
 - ◆ 所以三 $\sin 130^\circ$ 嘅值會係正
 - ◆ 而 $\cos 130^\circ$ 同 $\tan 130^\circ$ 嘅值係負。
- 300° 係喺第四象限，第四象限係“C”（即 $\cos$ ）。
 - ◆ 所以三 $\cos 300^\circ$ 嘅值會係正
 - ◆ 而 $\sin 300^\circ$ 同 $\tan 300^\circ$ 嘅值係負。

13.1.4. 三角恆等式

✧ 初中嘅時候我哋已經學咗兩條最重要嘅三角恆等式：

■ $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$

■ $\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$

● 而喺依課度因為我哋學咗“廣義角三角函數”，所以要學埋其他嘅三角恆等式。

■ 所謂“其他”嘅三角恆等式其實係“一連串”用嘅做化簡用嘅式。

◆ 例子： $\sin(180^\circ - \theta) = \sin\theta$ 、 $\sin(90^\circ - \theta) = \cos\theta$

◆ 如果想知有幾多條咁嘅恆等式，大家可以睇返書。

■ 先留意依 D 恆等式係有固定嘅形式：

◆ 左面係 $\text{XXX}(a \pm \theta)$ 當中 XXX 為 $\sin/\cos/\tan$ ； $a=0^\circ/90^\circ/180^\circ/270^\circ/360^\circ$

◆ 右面係： $\pm \text{YYY}\theta$ 當中 XXX 為三角函數 $\sin/\cos/\tan$

● 我自問就背唔到咁多條式。反而我係用以下嘅“方法”嚟睇返條恆等式嘅“右方”出嚟：

■ 先利用左邊嘅“角度”去決定右邊嘅 YYY：

◆ 如果 $a=0^\circ/180^\circ/360^\circ$ ：

YYY 會等於 XXX，即係照抄個三角比函數去右邊

◆ 如果 $a=90^\circ/270^\circ$ ：

咁“有 $\cos$ 變有 $\sin$ ，有 $\sin$ 變有 $\cos$ ”，

即係： $\sin$ 變 $\cos$ ， $\cos$ 變 $\sin$ ， $\tan$ 變 $1/\tan$ (即 $\cot$)

■ 最後係決定右邊嘅正負號。方法係：

◆ 先唔理 θ 係幾多度都好，當佢係好細。

◆ 利用“CAST”嚟定左方嘅 $\text{XXX}(a \pm \theta)$ 係正定負

➢ 如果係負，右邊就會係 “ $-\text{YYY}\theta$ ”

➢ 如果係正，右邊就會係 “ $\text{YYY}\theta$ ”

● 例子：化簡 $\sin(270^\circ + \theta)$

● 解說：

■ 因見到 270° ，所以右邊嘅三角函數係 $\cos\theta$ (因為左邊是 $\sin$)

■ $270^\circ + \theta$ 係喺第四象限入面，而 $\sin$ 喺度係負嘅。所以右邊係“-”

所以 $\sin(270^\circ + \theta) = -\cos\theta$

● 例子 2：化簡 $\cos(360^\circ - \theta)$

● 解說：

■ 因見到 360° ，所以右邊嘅三角函數唔駛變，即係 $\cos\theta$

■ $360^\circ - \theta$ 係喺第四象限入面，而 $\cos$ 喺度係正嘅。所以右邊係“+”。

所以 $\cos(360^\circ - \theta) = \cos\theta$

✧ 只要練習多幾次、明咗個方法，我總覺得咁樣好過背咁多條公式。

13.1.5. 三角函數圖像及其性質

- 之前我哋已經喺 “9.1 描繪及比較不同函數的圖像” 中見過三角函數圖像：

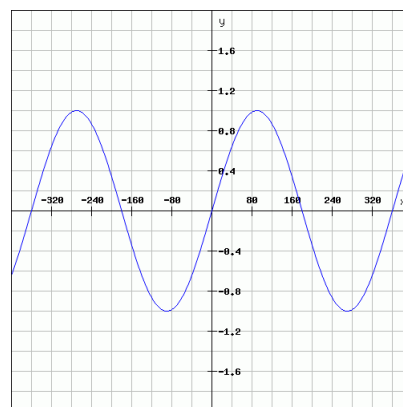
- $y = \sin x$ (右圖中的藍線)
- $y = \cos x$ (右圖中的紅線)
- $y = \tan x$ (右圖中的綠線)

- ☆ 喺學三角函數圖像嘅時候，大家最緊要係知道個圖像嘅極大值、極小值同週期性。

- 至於圖像嘅樣，其實只要我哋有個印象、再利用計數機試一 D 點出嚟，咁就可以畫返出嚟。

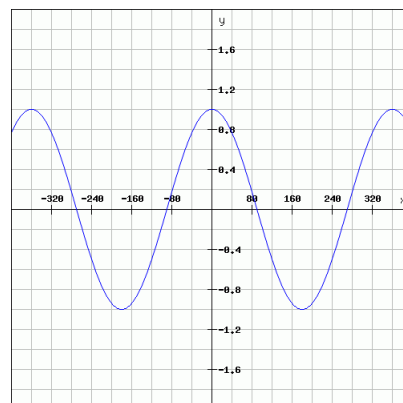
$y = \sin x$ 圖像

- $y = \sin x$ 嘅圖像係一個波浪形。
 - 我哋可用計數機代 $x=0^\circ, 90^\circ, 180^\circ, 270^\circ, 360^\circ$ 計出相應嘅 y 值，咁就可以畫到圖像。
- 圖像的極大值為 1，極小值為 -1。
 - 所以我哋會話 $-1 \leq \sin x \leq 1$ 。
- 圖像的週期性係 360° 。
 - 即係每過 360° 圖就會重覆。



$y = \cos x$ 圖像

- $y = \cos x$ 嘅圖像都係一個波浪形。
 - 同樣地，我哋可用計數機幫手畫圖像。
 - 留意當 $x=0^\circ$ 時， $y = 1$ 。
- 圖像的極大值為 1，極小值為 -1。
 - 所以我哋會話 $-1 \leq \cos x \leq 1$ 。
- 圖像的週期性係 360° 。



$y = \tan x$ 圖像

- 唔知點形容 $y = \tan x$ 嘅圖像都係一個波浪形。
 - 同樣地，我哋可用計數機幫手畫圖像。
 - 留意當 $x=89.999^\circ$ 時， y 係非常大。所以當 $x=90^\circ$ 時， y 係無限大。
 - 但當 “過咗 90° 時”， y 會變成非常負。
- 圖像嘅極大值同極小值係 “ $+\infty$ ” 同 “ $-\infty$ ”。
- 圖像的週期性係 180° 。

