

## 12.3. 理解圓方程 (Understand the Equation of a Circle)

◇ 其實大家喺軌跡嗰一課已經學咗其中一個搵圓方程嘅方法。喺度先重溫吓：

■ 例子：S 點與點 A(4, 5) 的距離為 3。求 S 點的軌跡。

■ 解答： 設 S 點為 (x, y)。

因為 SA 長度 = 3

$$\text{所以 } \sqrt{(x-4)^2 + (y-5)^2} = 3$$

$$(x-4)^2 + (y-5)^2 = 9$$

$$x^2 - 8x + 16 + y^2 - 10y + 25 = 9$$

$$x^2 + y^2 - 8x - 10y + 32 = 0$$

### 12.3.1. 圓方程的表達形式 (Forms Representing Equation of a Circle)

● 其實喺上面嘅例子入面，我哋已經見到晒兩個用嚟表達一個圓方程嘅方法：

- 標準式
- 通式

● 標準式 (Standard Form)

■ 一個圓心為 (h, k)，半徑為 r 的圓方程嘅標準式係：

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$$

- 其實依條式根本就喺搵軌跡嘅方法。
- 用標準式嘅好處係一睇就可以睇到圓嘅圓心位置同半徑。

● 通式 (General Form)

■ 假如我哋將圓方程嘅標準式展開 (即拆開二次方嘅括號)，我哋會得到以下嘅方程：

$$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0 \quad (\text{其中 } D, E, F \text{ 為常數})$$

- 大家唔好問用通式有咩好處，因為當中嘅道理喺必修部份係唔駛學嘅。
- 反而大家要識得點由通式計返個圓心坐標同半徑出嚟。

◆ 圓心坐標 =  $(-\frac{D}{2}, -\frac{E}{2})$

◆ 半徑 =  $\sqrt{(\frac{D}{2})^2 + (\frac{E}{2})^2 - F}$

### 12.3.2. 求圓方程的方法 (Methods of Finding Equation of a Circle)

✧ 其實求圓方程有兩個方法。但喺到底用邊一個就其實係決定於題目俾嘅咩嘅資料、條件我哋。

● 第一個情形“利用圓嘅圓心同半徑”。

■ 其實依個根本就係我哋最初學求圓軌跡嘅方法、亦係圓嘅標準式。

■ 如果個圓心係  $(h, k)$ ，半徑係  $r$ ，咁圓方程就係：

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$$

✧ 中學嘅數就係咁，好多時同一樣嘢學多過一次，只不過“學”同“用”嘅角度唔同。

● 第二個情形“利用圓上任意三點的坐標”。

■ 仲記唔記得對於三點不共線嘅點，其實係會有一個圓通過佢哋？

◆ 依個方法就係用嘅依個原理嚟搵個圓嘅方程。

■ 方法如下：

◆ 設圓方程為  $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$  (其中  $D, E, F$  為常數)

◆ 因為  $D$  點係喺圓嘅上面，所以我哋可以代佢哋入圓嘅方程度。

➢ 代完之後我哋就會有三條式 (入面有三個未知數  $D, E, F$ )。

➢ 解咗依三條聯立方程就會求到  $D, E, F$ 。

➢ 當然，大家有學過點解三元一次聯立方程。所以題目應該會係“經過特別設計”。例如圓上嘅其中一點係  $(0, 0)$ ，咁一代入條式度，我哋就會計到  $F = 0$ 。因此就變成只有兩個未知數 (即係我哋要解二次一次聯立方程)。

### 12.3.3. 由圓方程描述有關圓的特徵 (Describing the Features of a Circle from Its Equation)

● 首先，因為我哋已經學咗“標準式”同“通式”，所以我哋可以由圓嘅方程度睇到、或計到圓嘅圓心坐標同半徑。

● 其次我哋要識得判斷一點到底係喺圓內、圓外定圓上 (即圓通過依一點)。

■ 睇落就好似好難。但其實好易，方法如下：

◆ 先由圓方程度計個圓嘅圓心坐標  $(h, k)$  同半徑  $r$ 。

◆ 再計已知點同圓心嘅距離。當中我哋要用以下嘅公式：

$$\text{兩點距離} = \sqrt{(x_1 - h)^2 + (y_1 - k)^2}$$

◆ 最後就係比較“兩點距離”同“圓半徑”邊個大。

➢ 如果“兩點距離  $>$  圓半徑”，該點就係喺圓嘅外面。

➢ 如果“兩點距離  $=$  圓半徑”，該點就係喺圓嘅上面。

➢ 如果“兩點距離  $<$  圓半徑”，該點就係喺圓嘅入面。