

7.6. 探究某些等比數列的無限項求和公式及使用該公式解有關問題 (Explore the General Formulae of the Sum of Infinity of Certain Geometric Sequences and Use the Formulae to Solve Related Problems.)

7.6.1. 等比數列的無限項求和公式

- ✧ “等比數列的無限項和”即係將一個等比數列嘅項數無窮無盡咁一直加落去。
- ✧ 依個概念雖然好似好抽象，但其實喺現實生活中都有好多有關嘅例子：
 - 先想像枱面上有一個蛋糕、一個每小時開一次嘅鬧鐘。
 - 當鬧鐘響嘅時候，小明會將枱面上嘅蛋糕切開成兩等份並把其中一半吃掉。
 - 因此，小明第一次會吃掉 $1/2$ 個蛋糕、剩下 $1/2$ 個。
 - 第二次，小明把剩下的 $1/2$ 個蛋糕切開、把其中一半吃掉（即吃掉 $1/4$ 個蛋糕）。
 - 第三次，小明把剩下的 $1/4$ 個蛋糕切開、把其中一半吃掉（即吃掉 $1/8$ 個蛋糕）。
 - 以下係小明每次食咗幾多蛋糕嘅記錄：

$1/2, 1/4, 1/8, 1/16$

以上嘅數字剛好是一個等比數列（首項為 $1/2$ ，公比為 $1/2$ ）。
 - 咁如果我問你：“假如小明一路係咁食落去，到底最後佢會唔會食到兩個蛋糕呢？”
 - 我諗你會答“唔會”。
 - 咁又點解呢？.....你可能會答“根本就只係得一個蛋糕.....”。
 - 但根據上次所講，小明每次只係食枱面上嘅蛋糕嘅一半，咁即係每次小明都會剩返 D 留返下次食。咁即係永遠都食唔完，咁一路食落去，小明食蛋糕嘅總數量咪會一路大落去..... 咁計法，又點解唔會食到兩個蛋糕嘅？
 - 從數學角度嚟講，小明食蛋糕嘅總數量 $= 1/2 + 1/4 + 1/8 + 1/16 + 1/32 + \dots$
 - 依個就係“等比數列的無限項和”，記作 S_{∞} （ ∞ 有“無限”嘅意思）。
- ✧ 無限項求和公式：
$$S(n) = \frac{a}{1-R} \quad \text{其中 } -1 < R < 1$$
 - 留意只有當“ $-1 < R < 1$ ”嘅時候，數列中各項嘅數值先會一個細過一個，咁“無限項和”先會存在。
 - ◆ 例如 $2 + 4 + 8 + 16 + 32 + \dots$ 根本就會越加越大，唔會有“無限項和”
- ✧ 等差數列係有無限項和嘅！

7.6.2. 使用該公式解有關問題

- 同上一章一樣，“使用公式解有關問題”即係“做長題目”。
- 當題目提到嘅係等比數列而又有“不斷咁重覆”嘅意思時，咁就極有可能係考緊“無限項和”。留意要先計得首項 a 及公比 R 。