19. 解題要點：

這題目是在考“演釋幾何及坐標坐何”。

一般解法：

(a) (i) AB = AD （已知）

AE = AE （公共邊）

∠ADB = ∠DBA （等弦對等圓周角）

所以 △ABE≅△ADE （R.H.S.）

(ii) 因△ABE≅△ADE，即 AC 把△ABD 分成兩等份。

所以△ABD 的形心必定在 AC 上。

因△ABE≅△ADE，所以∠AED = 90°。即 AE 為△ABD 的其中一條垂線。

所以△ABD 的垂心必定在 AC 上。

∠ACQ = ∠AED = 90° （同位角，BD//PQ）

因 AC⊥PQ，所以 AC 是圓形的直徑。

所以△ABD 的外心在 AC 上。

因△ABE≅△ADE，所以∠EAD = ∠EAB。

即 AC 為∠DAB 的角平分線。

所以△ABD 的內心在 AC 上。

因此△ABD 的內心、垂心、形心與外心皆在 AC 上，所以它們是共線的。

(b) PQ 的斜率 = BD 的斜率

$$= \frac{12-4}{8-4} = 2$$

因 AD 是一條水平線，所以圓心的 x-坐標 = (4 + 14)/2 = 9

設圓心為 O，坐標 (9, k)。

因 DO = BO，所以

$$(9-4)^2 + (k-4)^2 = (9-8)^2 + (k-12)^2$$

$$25 + (k^2 - 8k + 16) = 1 + (k^2 - 24k + 144)$$

$$16k = 104$$

$$k = 6.5$$

即圓心坐標 = (9, 6.5)。

設 C 點的坐標為(p, q)。

因 AC 是直徑，所以圓心為 AC 的中間點。所以

$9 = (p + 14) / 2$ 及 $6.5 = (q + 4) / 2$

$p = 4$ 及 $q = 9$

即 C 點 = (4, 9)

所以 PQ 的方程為

$$\frac{y-9}{x-4} = 2$$

$$y - 9 = 2x - 8$$

$$2x - y + 1 = 0$$

² 其實要求切線 PQ 的方程，我們要先求 PQ 的斜率及 PQ 通過的其中一點的坐標。

- 求 PQ 的斜率的方法不太困難。
- 至於“PQ 通過的其中一點的坐標”。而根據題目，我們理應可猜到要求的是 C 點的坐標。
  - 求 C 點的坐標離不開要先求圓心的坐標。
  - 而求圓心的坐標也有很多方法。
  - 除題解中的方法，大家也可以先設圓方程為 $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$。然後代入 A、B、D 三點的坐標求得三條方程。把這三條聯立方程解後便可得到圓的方程。圓心便相等於 (-D/2, -E/2)了。
  - 另一方法是利用“E 為 B、D 的中間點”的原理求得 E 點坐標。之後再求得直線 AC 的方程。因圓心為 (9, k)，所以把圓心坐標代入直線方程便可求得 k 的值。