

18. 解題要點：

這題目是在考“三角比”。

一般解法：

$$\begin{aligned} \text{(a) 在}\triangle ADC \text{內,} \quad \sin 45^\circ &= DC / AC \\ DC &= 20 (\sqrt{2}/2) = 10\sqrt{2} \text{ cm} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{在}\triangle ADC \text{內,} \quad \sin 30^\circ &= DC/BC \\ BC &= 2 (DC) = 20\sqrt{2} \text{ cm} \\ \cos 30^\circ &= BD/BC \\ \sqrt{3}/2 &= BD/BC \\ BD &= (\sqrt{3}/2) (20\sqrt{2}) = 10\sqrt{6} \text{ cm} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(b) (i) 平面 BCD 與水平面間之交角} &= \angle ADB \\ \text{在}\triangle ADC \text{內,} \quad \tan 45^\circ &= DC / AD \\ AD &= DC = 10\sqrt{2} \text{ cm} \end{aligned}$$

考慮 $\triangle ADB$ ，利用餘弦公式，

$$\begin{aligned} (AB)^2 &= (AD)^2 + (BD)^2 - 2(AD)(BD) \cos \angle ADB \\ (18)^2 &= (10\sqrt{2})^2 + (10\sqrt{6})^2 - 2(10\sqrt{2})(10\sqrt{6}) \cos \angle ADB \\ 324 &= 200 + 600 - 200\sqrt{12} \cos \angle ADB \\ \cos \angle BDA &= 476 / 200\sqrt{12} \\ \angle ADB &= 46.6^\circ \end{aligned}$$

所以，平面 BCD 與水平面間之交角 = 46.6°

$$\text{(ii) 四面體 ABCD 的體積} = (1/3) \times (\triangle ADC \text{ 面積}) \times (\text{B 點離地面的高度})$$

而當中 $\triangle ADC$ 面積 不會改變

$$\text{B 點離地面的高度} = BD \sin \angle ADB = 10\sqrt{6} \sin \angle ADB$$

因此當 $\angle ADB$ 由 40° 增加至 140° 期間，四面體 ABCD 的體積起初會增加，直至當 $\angle ADB = 90^\circ$ 時，四面體 ABCD 的體積會達到一個最大值。之後當 $\angle ADB$ 再增加時（即大於 90° ），四面體 ABCD 的體積會下降。

（如有時間，大家可考慮於答案內計埋個最大體積的值。）